LABORATORIUM AKUSTYKI

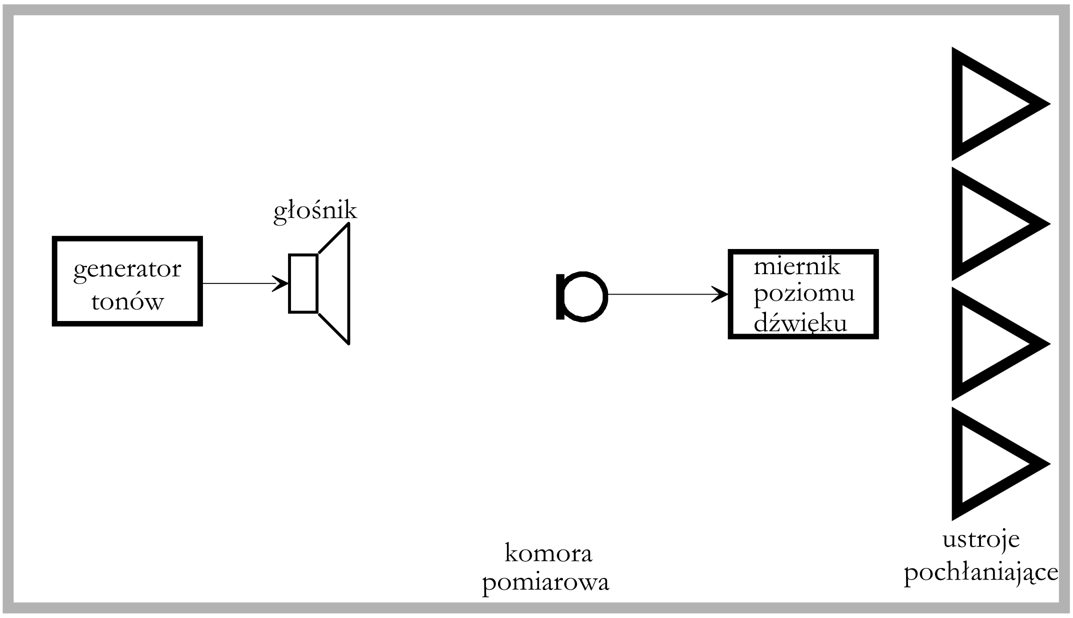
ĆWICZENIE NR **7**

Pomiar parametrów superkierunkowego głośnika parametrycznego

1.**Cel ćwiczenia**

Celem ćwiczenia jest poznanie sposobu działania głośnika parametrycznego.

2.**Układ pomiarowy**



Układ pomiarowy:

- głośnik parametryczny na obrotowym stoliku z podziałką kątową
- miernik Svantek 912 z wkładką ½” lub ¼”
- generator tonów
- taśma miernicza

Zaproponować sposób jednoczesnego pomiaru charakterystyki kierunkowości promieniowania w.cz.i m.cz. wykorzystują analizator widma w mierniku Svantek

3. **Zadanie laboratoryjne**

3.1. Ustalić częstotliwość pracy przetworników wysokoczęstotliwościowych i poziom wytwarzanego przez nie ciśnienia w.cz. oraz porównać ten poziom z wartościami dopuszczalnymi w związku ze szkodliwym oddziaływaniem na człowieka.

3.2. Określić przestrzenny rozkład pola w.cz. i określić odległość wnikania fali w.cz. w środowisko dla spadku 20dB.

3.3. Określić przestrzenny rozkład pola m.cz. w odległości poza strefą oddziaływania fal w.cz. (charakterystyka kierunkowości źródła m.cz. i zasięgi promieniowania).

3.4. Sformułować wnioski dotyczące przydatności głośnika parametrycznego do nagłaśniania dla zindywidualizowanego słuchacza oraz odpowiedzieć na pytanie dlaczego w środowisku wodnym sodary parametryczne mają znacznie lepsze parametry.

4. **Zagadnienia do przygotowania**

4.1. Promieniowanie anten akustycznych, szyk antenowy, charakterystyka kierunkowości i współczynnik kierunkowości, anteny liniowe i powierzchniowe, antena fali bieżącej

4.2. Nieliniowa teoria fal akustycznych, fale proste i wiązki akustyczne, antena oparta na nieliniowym mieszaniu fal akustycznych w środowisku ciągłym, wykorzystanie nieliniowości do wytwarzania anteny fali bieżącej (załączony materiał szkoleniowy)

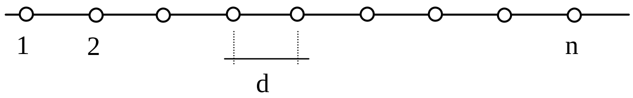
4.3. Metoda szacowania szerokości wiązki na postawie teorii Westervelta, efektywność energetyczna anten parametrycznych (załączony materiał szkoleniowy)

Literatura

1. Dobrucki A., Podstawy akustyki. Skrypt PWr., Wrocław 1987
2. Dobrucki A., Przetworniki elektroakustyczne
3. Novikov B.K., Rudenko O.B., Timoszenko W.I., Nelinejnaja gidroakustika, str. 7-30
4. Materiał pomocniczy nt. akustyki nieliniowej, teorii wiązek akustycznych i metody Westervelta szacowania parametrów wiązki m.cz.

Appendix 1. Antena fali bieżącej

Źródła punktowe rozmieszczone na jednej prostej w stałej odległości ***d*** promieniują fale o jednakowej częstotliwości i nie zacieniają się.

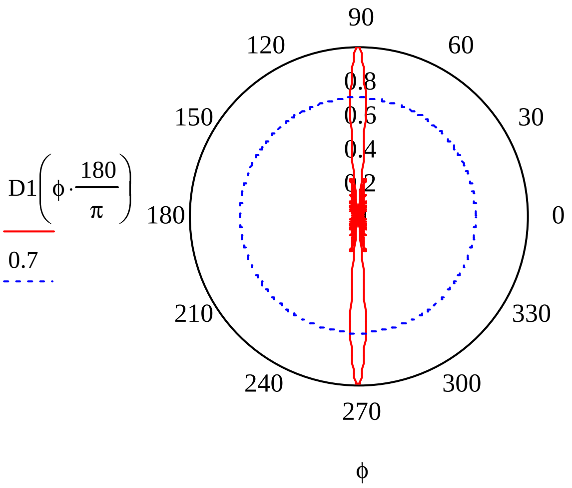


Opóźnienie pomiędzy źródłami wynosi $\boldsymbol{\tau}$, gdy $\tau=-d/c$ wtedy szyk antenowy jest tzw. anteną fali bieżącej. Charakteryzuje ten szyk brak promieniowania wstecznego, chociaż promieniowanie synfazowe w płaszczyźnie prostopadłej do prostej źródłowej anteny o tej samej długości posiada węższą charakterystykę promieniowania o symetrię walcowej, tj. charakterystykę dookólną wokół prostej źródłowej.
Zależność opisująca charakterystykę kierunkowości, wyznaczana metodą dyfrakcji Fraunhofera, jest następująca:

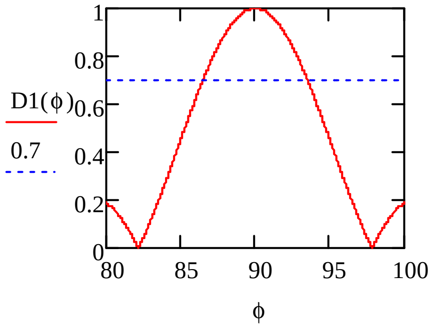
$$d1c(\phi)=\begin{cases} n \ \textit{jeśeś}\left(\phi=0 \text{ lub } \phi=360 \ i \ \tau=\dfrac{-d}{c}\right) & \\ \dfrac{\left|\sin\left[\dfrac{n\cdot k\cdot\left(d\cdot\cos\left(\dfrac{\phi\cdot\pi}{180}\right)+\tau\cdot c\right)}{2}\right]\right|}{\left|\sin\left[\dfrac{k\cdot\left(d\cdot\cos\left(\dfrac{\phi\cdot\pi}{180}\right)+\tau\cdot c\right)}{2}\right]\right|} & \textit{jeśeś}\left(\phi\neq 0 \ i \ \phi\neq 360 \text{ lub } \tau\neq\dfrac{-d}{c}\right) \end{cases}$$

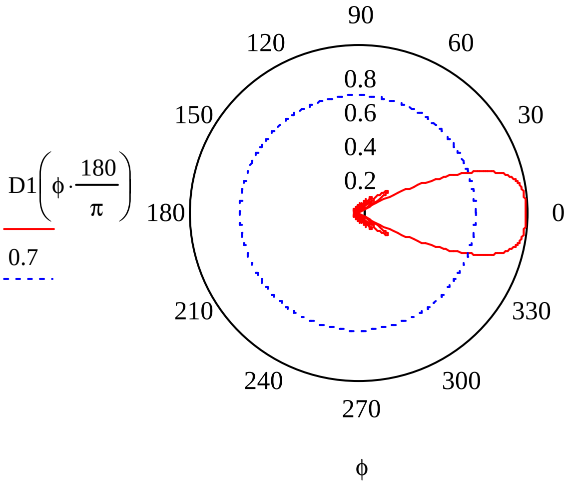
Φ – kąt względem prostej źródłowej, *c* – prędkość dźwięku, *n* – liczba źródeł, *d* – odległość między kolejnymi źródłami, τ – przesunięcie czasowe, $k=\omega/c$ – liczba falowa.

Dla n=500, d=0,005 m, f=1000 Hz, c=341 m/s pokazano poniżej charakterystyki kierunkowości dla 3 wartości τ=0, -0,5 d/c, -d/c. Można zauważyć jak znacznie zmienia się charakterystyka promieniowania w zależności od przesunięcia czasowego. Dla $\tau=-d/c$ mamy antenę fali bieżącej o najmniejszym promieniowaniu wstecznym. Warto wprowadzić powyższą zależność do MathCada i wykonać eksperymenty dla różnych długości całej anteny przez zmianę wartości *d* i *n*.
Pytanie: Jaki jest efekt zwiększania *d* oraz zmniejszania n przy stałej wartości iloczynu n·d ?

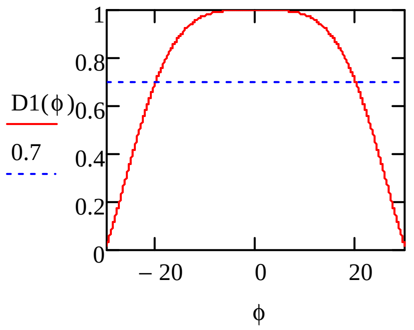

90
120
60
150
30
180
0
210
330
240
300
270
0.8
0.6
0.4
0.2
D1(ϕ·180/π)
0.7
ϕ

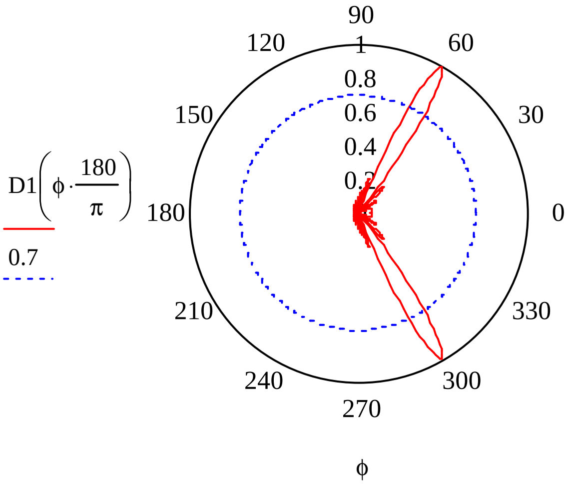
τ=0


D1(ϕ)
0.7
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
80
85
90
95
100
ϕ

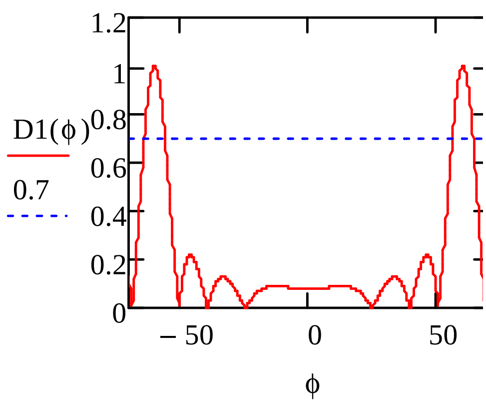

90
120
60
150
30
180
0
210
330
240
300
270
0.8
0.6
0.4
0.2
D1(ϕ·180/π)
0.7
ϕ

τ=-d/c


D1(ϕ)
0.7
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
– 20
0
20
ϕ


90
120
60
150
30
180
0
210
330
240
300
270
1
0.8
0.6
0.4
0.2
D1(ϕ·180/π)
0.7
ϕ

τ=-0.5·d/c


D1(ϕ)
0.7
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
– 50
0
50
ϕ

Elementy akustyki nieliniowej, płaska fala prosta

Zjawiska opisujemy w układzie współrzędnych (x,t), x – współrzędna przestrzenna (odległość od początku układu współrzędnych), t – czas.
Dla akustycznej fali płaskiej w środowisku idealnym (bez lepkości i przewodnictwa ciepła) słuszne są poniżej podane równania podstawowe. Nie zakłada się przy tym, że fala posiada nieskończenie małą amplitudę tj. równania są w tzw. wersji niezlinearyzowanej. Ruch środowiska opisują: u(x,t) – prędkość cząstek akustycznych, p(x,t) – ciśnienie akustyczne (nadwyżka ciśnienia ponad ciśnienie statyczne P_0), ρ(x,t) – gęstość środowiska (również jest nadwyżką ponad gęstość w stanie ustalonym ρ_0).

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$ równanie Eulera (II zasada dynamiki)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$ równanie ciągłości (zachowania masy środowiska)

$$p = P_0 \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\kappa}$$ równanie termodynamiczne przemiany adiabatycznej

$\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ wykładnik adiabaty, $(.)_0$ jest wartością w stanie ustalonym.

Zadanie: <u>Wskazać składniki tych równań, które są źródłami nielinearności.</u>
Powyższe równania można zlinearyzować tzn. odrzucić składniki zawierające iloczyny wielkości małych a w miejsce ρ należy wprowadzić ρ_0. W rezultacie otrzymuje się:

$$u_t + \frac{1}{\rho_0} \cdot p_x = 0$$

$$\rho_t + \rho_0 \cdot u_x = 0$$

$$p \approx \frac{\partial p}{\partial \rho} \cdot d\rho = \frac{\kappa P_0}{\rho_0} \cdot \rho = c_0^2 \cdot \rho$$

c_0 – małosygnałowa prędkość dźwięku (331 m/s)

Z równań eliminuje się *u* oraz *ρ* przez zróżniczkowanie pierwszego równania po *x* a drugiego po *t* i uwzględnieniu równania trzeciego. W rezultacie dochodzi się do dobrze znanego równania falowego:

$$p_{xx} - \frac{1}{c_0^2} p_{tt} = 0$$

Pozostałe wielkości pola akustycznego u oraz ρ spełniają takie samo równanie. Rozwiązanie tego równania jest superpozycją fal biegnących w dodatnim i ujemnym kierunku osi ox:

$$p(x,t) = p_1(x - c_0 t) + p_2(x + c_0 t)$$

Jeżeli weźmiemy pod uwagę falę biegnącą w dodatnim kierunku osi OX, $p_1(x - c_0 t)$, to można sprawdzić, że jest ona rozwiązaniem następującego równania pierwszego stopnia:

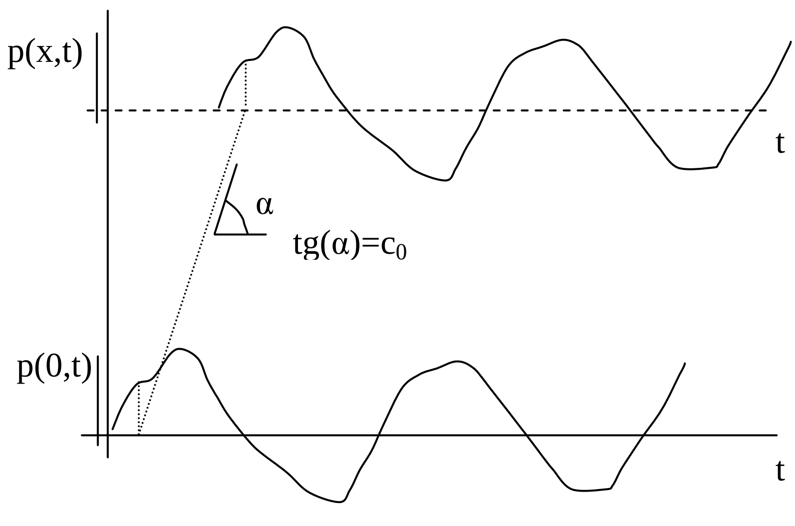
$$p_x + \frac{1}{c_0} p_t = 0$$

W tym przybliżeniu trzy wielkości pola p, u, ρ są powiązane funkcyjnie, a nie przez zależności różniczkowe: $p = c_0^2 \rho,\ u = c_0 \frac{\rho}{\rho_0}$.

Równanie rządzące falą biegnącą można przekształcić korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji uwikłanej otrzymując:

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{p=const} = c_0$$

Interpretacja tego równania prowadzi do pojęcia charakterystyk pola akustycznego (prostych w płaszczyźnie x,t na których rozprzestrzenia się stała wartość ciśnienia, gęstości i prędkości). Taką interpretację ilustruje rysunek:



Ilustracja zależności $p(x,t)=p(0,t-x/c_0)$

Opóźnienie bez zmiany kształtu fali z sygnałowego punktu widzenie nie wprowadza zniekształceń nieliniowych.

Sprawa ewolucji fali w przestrzeni komplikuje się, gdy zrezygnujemy z linearyzacji, a jest to konieczne dla fal o dużej amplitudzie. Dla fal w powietrzu duże amplitudy pojawiają się dla bardzo dużych poziomów ciśnienia akustycznego L_p>130 dB.
Sukcesy w poszukiwaniu analitycznych rozwiązań, w odróżnieniu od badań modelowych na komputerze, uzyskano dla płaskich fal prostych. Przy założeniu, że, podobnie jak dla fal w przybliżeniu liniowym, wielkości u i ρ związane są funkcyjnie u=u(ρ) (p i ρ są związane przez równanie stanu – adiabaty). Pomijając procedurę wyprowadzania, dla środowiska idealnego tj. bez efektów dyssypacji energii fali, uzyskano następującą zależność dla charakterystyk pola:

$$\frac{dx}{dt}_{u=const} = c(u) + u = c_0 + \frac{\kappa+1}{2}\cdot u\,.$$

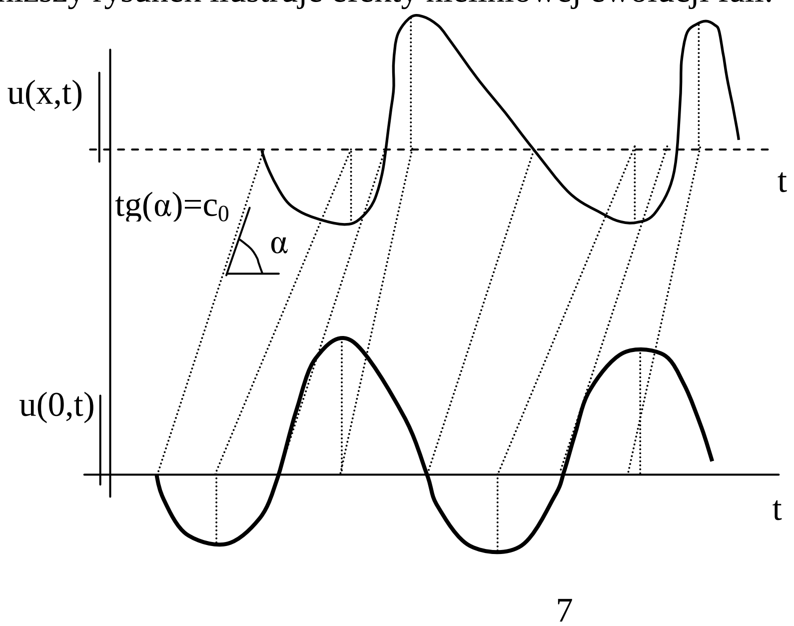
Wielkość $\beta = \frac{\kappa+1}{2}$ nazywa się parametrem nieliniowym środowiska. Prędkość propagacji fali $c(u) = c_0 + \frac{\kappa-1}{2}u$ zależy od wartości prędkości cząsteczek akustycznych u (podczas gdy w przybliżeniu liniowym była stała). Charakterystyki pola, poprzednio równoległe, dla fal prostych mają zmienne nachylenie zależne od wartości u.
W konsekwencji nieliniowa fala prosta spełnia następujące nieliniowe równanie różniczkowe:

$$u_t + (c_0 + \beta\cdot u)\cdot u_x = 0$$

Równanie to można przekształcić do równoważnej, w tzw. drugim przybliżeniu, postaci:

$$u_x + \frac{1}{c_0}\cdot\left(1-\beta\cdot\frac{u}{c_0}\right)\cdot u_t = 0$$

Oba te równania noszą nazwę równania Burgera dla środowiska idealnego.
Poniższy rysunek ilustruje efekty nieliniowej ewolucji fali:



Proces ewolucji charakteryzuje się następującymi właściwościami:

- amplitudy chwilowych wartości prędkości akustycznej nie ulegają zmianie a jedynie ich położenie na osi czasu zmienia miejsce;
- odcinki osi czasu od wartości ujemnych prędkości akustycznej do dodatnich są skracane i przeciwnie, odcinki od wartości dodatnich do ujemnych są rozciągane w czasie;
- proces zniekształcania kumuluje się i w efekcie fragmenty krzywej są nachylone pod kątem 90^{o} do osi ox; ten efekt wiąże się z pojawieniem się w fali niejednoznaczności nazywanej nieciągłością;
- fala pierwotnie okresowa pozostaje okresową z tym samym okresem;
- fala pierwotnie sinusoidalna deformuje się przechodząc w falę piłozębną, po czym następuje bardzo silne tłumienie fali, tzw. tłumienie nieliniowe, związane z obcinaniem amplitud (wartości maksymalnych), okres fali pozostaje niezmieniony, natomiast następuje ewolucja widma sygnału.

Opisana ewolucja jest nieliniowa co szczególnie uwidacznia się w analizie widmowej – pojawiają się prążki harmoniczne wielokrotne względem częstotliwości podstawowej. Dla widma o skomplikowanej strukturze pojawiają się częstotliwości sumacyjne i różnicowe. Ten efekt wykorzystywany jest w tzw. nieliniowych antenach parametrycznych stosowanych w sonarach w wodzie, a również jako źródła fali słyszalnej o szczególnie wąskiej charakterystyce promieniowania.

Dla ilościowego opisania działania głośnika nieliniowego nie jest wystarczająca analiza ewolucji fali płaskiej, a konieczne jest badanie propagacji wiązek akustycznych z uwzględnieniem tłumienia i dyspersji.
Zamieszczone poniżej równanie jest pełną wersją równania Burgera dla ośrodka z dyssypacją (tarcie i przewodnictwo cieplne):

$$p_z - \frac{\beta}{c_0^3 \rho_0} p \cdot p_\tau - \frac{b}{2c_0^3 \rho} \cdot p_{\tau\tau} = 0\,,$$

gdzie z – jest zmienną przestrzenną, $\tau = t - z / c_0$ jest tzw. czasem retardowanym, b – jest parametrem dyssypacyjnym. To równanie w dalszym ciągu opisuje ewolucję fali płaskiej. Dla wiązek akustycznych należy dodatkowo dołączyć efekt dyspersji wiązki i uwzględnienie 3 wymiarów. Równanie opisujące w tym przypadku nosi nazwę równania KZCh (Kuznetsov, Zabolotskaja, Chochlov):

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(p_z - \frac{\beta}{c_0^3 \rho_0} p \cdot p_\tau - \frac{b}{2c_0^3 \rho} \cdot p_{\tau\tau} \right) = \frac{c_0}{2} \cdot \Delta_\lrcorner$$

gdzie $\Delta_\lrcorner = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ jest laplasjanem w płaszczyźnie prostopadłej do osi wiązki. Nie znane jest analityczne rozwiązanie tego równania, możliwa jest analiza numeryczna, również kolejne przybliżenia obowiązujące dla fal o różnicowej częstotliwości.

W ramach tzw. drugiego przybliżenia, tj. po pozostawieniu składników liniowych i kwadratowych ze względu na iloczyny wielkości małych, otrzymuje się dla ciśnienia akustycznego następujące równanie:

$$\Delta p - \frac{1}{c_0^2} p_{tt} + \frac{b}{c_0^2 \rho_0} \frac{\partial}{\partial t} \Delta p = -Q$$

gdzie po lewej stronie zebrane są człony liniowe a po prawej nieliniowe. Procedura rozwiązywania równania jest tzw. metodą kolejnych przybliżeń. Poszukuje się rozwiązania w postaci:

$$p = p^{(1)} + p^{(2)}$$

gdzie p^1 jest rozwiązaniem równania jednorodnego dla Q=0 przy warunku brzegowym

$$p(x, y, z = 0, t) = p^{(1)}(x, y, t)$$

Rozkład ciśnienia na powierzchni źródła zajmuje ograniczony obszar i z tego powodu pojawiają się efekty charakteryzujące propagację wiązek akustycznych, np. dyspersję wiązki akustycznej (w liniowym przybliżeniu).
Następnie dodatkowo zakładamy, że fala pierwotna jest falą biegnąca z prędkością c_0, tj. $p^1=p^1(x,y,t-z/c_0)$ oraz, że w wyrażeniu na Q można zastosować zależności akustyki liniowej. Przy tych założeniach małoczęstotliwościowe pole drugiego rzędu jest rozwiązaniem niejednorodnego równania Helmholtza:

$$\Delta p^{(2)} - \frac{1}{c_0^2} \cdot \frac{\partial^2 p^{(2)}}{\partial t^2} = -\frac{\kappa}{c_0^4 \rho_0} \cdot \frac{\partial^2 \left(p^{(1)}\right)^2}{\partial t^2}$$

Niech rozkład ciśnienia akustycznego na powierzchni źródła będzie superpozycją dwóch składowych ω_1 i ω_2 posiadających rozkłady $A_1(x,y)$ i $A_2(x,y)$ dla z=0 oraz funkcje $\Phi_1(z)$ i $\Phi_2(z)$ przedstawiają zależność amplitud od współrzędnej z. Przewidujemy rozwiązanie 1 rzędu w następującej postaci:

$$p^{(1)}(x, y, z, t) = A_1(x, y)\Phi_1(z)\sin\left[\omega_1\left(t - \frac{z}{c_0}\right) + \phi\right] + A_2(x, y)\Phi_2(z)\sin\left[\omega_1\left(t - \frac{z}{c_0}\right)\right]$$

gdzie przykładowa postać $\Phi_{1,2}$ dana jest zależnością:

$$\Phi_{1,2}(z) = \exp\left(-\frac{b\omega_{1,2}^2}{2c_0^3 \rho_0} \cdot z\right) = \exp\left(-\alpha_{1,2} z\right).$$

Niech $\Omega = \omega_1 - \omega_2$ wtedy składowe fourierowskie Q na częstotliwości różnicowej są następujące:

$$Q_- = -\frac{\kappa\Omega^2}{c_0^4\rho_0} A_1(x,y)A_2(x,y)\Phi_1(z)\Phi_2(z)\cos\left[\Omega\left(t - \frac{z}{c_0}\right) + \phi\right]$$

Zespolona amplituda na częstotliwości różnicowej Ω spełnia niejednorodne równanie Helmholtza:

$$\Delta A_- + K^2 A_- = \frac{\kappa\Omega^2}{c_0^4\rho_0} A_1 A_2 \Phi_1 \Phi_2 \cdot e^{-iKz}$$

gdzie $K = \frac{\Omega}{c_0}$.

Rozwiązanie równania Helmholtza prowadzone jest wykorzystaniem funkcji Greena i przybliżeń słusznych w obszarze Fraunhofera. Poszukiwane rozwiązanie ma następującą postać:

$$A_- = -\frac{\kappa\Omega^2}{c_0^4\rho_0} \cdot \frac{e^{-iKR_0}}{4\pi R_0} D_t D_l$$

gdzie D_t jest poprzecznym aperturowym mnożnikiem i jest splotem przekształceń Fouriera funkcji $A_1(x,y)$ i $A_2(x,y)$:

$$D_t = F\{A_1(x,y)\} \otimes F\{A_2(x,y)\}$$

D_l jest wzdłużnym aperturowym mnożnikiem:

$$D_l = \int_0^\infty \Phi_1(z')\Phi_2(z') e^{-iK\left(1 - \frac{z}{R_0}\right)z'} dz'$$

Oba mnożniki decydują o kształcie wiązki promieniowanej, o szerokości kątowej wiązki.

Kilka możliwych przykładów:

- Wiązka o promieniu a i rozkład amplitud ciśnienia na powierzchni źródła typu gaussowskiego, mamy wtedy następujące zależności:

$$A_1 A_2 = p_{01} p_{02} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{a^2}\right)$$

$$D_t = p_{01} p_{02} \pi a^2 \exp\left[-\left(\frac{Ka}{2}\sin(\Theta)\right)^2\right]$$

$$\sin(\Theta_{0.7}) = \frac{1.2}{Ka} = 0.19\frac{\Lambda}{a}$$

- Wiązka o promieniu a i rozkładzie równomiernym amplitud:

$$D_t = p_{01} p_{02} \pi a^2 \frac{2J_1(Ka \cdot \sin(\Theta))}{Ka \cdot \sin(\Theta)}$$

$$\sin(\Theta_{0.7}) = \frac{1.6}{Ka} = 0.26 \frac{\Lambda}{a}$$

- Mnożnik wzdłużny

$$\Phi_1 \Phi_2 = \exp\left(\frac{-2z}{l_z}\right), \quad l_z = \frac{2}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

$$\sin\left(\frac{\Theta_{0.7}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{Kl_z}} = 0.4\sqrt{\frac{\Lambda}{l_z}}$$

Amplituda ciśnienia na częstotliwości różnicowej dana jest zależnością znaną jako formuła Westervelta:

$$P_- = |A_-| = \frac{\kappa \Omega^2 S l_z}{8\pi R_0 c_0^4 \rho_0} p_{01} p_{02} \frac{1}{\sqrt{1 + (Kl_z)^2 \sin^4\left(\frac{\Theta}{2}\right)}}$$

<u>Przykład liczbowy</u>:

a=7.5 cm, l_z=1 m, Ω=6.28·10^3 s^{-1}, R_0=5 m, L_p=140 dB (poziom obu źródeł w.cz.) stąd

K=18.42

Mnożnik poprzeczny

sin ($\Theta_{0.7}$)=1.4/Ka=1.01 – zbyt mały wymiar poprzeczny źródła powoduje, że ten czynnik nie spowoduje spadku do wartości 0.7

Mnożnik wzdłużny

sin($\Theta_{0.7}$/2)=0.23, 2·$\Theta_{0.7}$=53.9^o – o szerokości wiązki zadecyduje mnożnik wzdłużny

Amplituda częstotliwości różnicowej na osi wiązki dla Θ=0:

$L_{P\_}$=58 dB, zatem sprawność przetwarzania jest niewielka (2 źródła 140 dB, każde wytwarza około 60 dB dla 1000 Hz w odległości 5m).

l_z należy wyznaczyć eksperymentalnie ponieważ znane zależności opisują tłumienie wiązki w wodzie.